Γραμμικό Υπόδειγμα: Πολυμεταβλητή Παλινδρόμηση

Γενικά η συμπεριφορά των περισσοτέρων οικονομικών μεταβλητών είναι συνάρτηση πολλών μεταβλητών. Έστω ότι η εξαρτημένη μεταβλητή Y είναι συνάρτηση K ερμηνευτικών μεταβλητών $X_1, X_2, \dots X_K$. Για παράδειγμα η ζήτηση (Y) ενός προϊόντος εξαρτάται από την τιμή του προϊόντος, τις τιμές ανάλογων προϊόντων που κυκλοφορούν και το εισόδημα του καταναλωτή. Αν υποθέσουμε ότι η συναρτησιακή σχέση $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_k)$ είναι γραμμική, για ένα δείγμα N παρατηρήσεων θα έχουμε:

$$Y_i = b_0 + b_1 X_{1i} + b_2 X_{2i} + \quad + b_k X_{ki} + u_i \quad (1)$$

όπου X_{1i} η i παρατήρηση της ερμηνευτικής μεταβλητής X_1, X_{2i} η i παρατήρηση της ερμηνευτικής μεταβλητής X_2 κλπ. Η (1) αποτελεί το <u>υπόδειγμα της γραμμικής πολυμεταβλητής παλινδρόμησης</u>

→ <u>Υποθέσεις για τη συμπεριφορά της στοχαστικής μεταβλητής u_i</u>

- Η u είναι πραγματική στοχαστική μεταβλητή: παίρνει τιμές με τυχαίο τρόπο.
- $E(u_i) = 0$
- $E(u_i^2) = \sigma^2 \quad (Var(u_i) = E\{u_i - E(u_i)\}^2 = E(u_i^2) = \sigma^2)$
- $E(u_i \cdot u_j) = 0$ για $i \neq j$

Οι υποθέσεις αυτές είναι ίδιες με τις υποθέσεις του απλού υποδείγματος

→ <u>Υποθέσεις για τις ερμηνευτικές μεταβλητές</u>

- Οι ερμηνευτικές μεταβλητές δεν είναι στοχαστικές. Οι τιμές τους παραμένουν σταθερές και δεν είναι όλες ίσες μεταξύ τους (όπως και στο απλό υπόδειγμα)

2/

•) Δεν υπάρχουν ακριβείς γραμμικές σχέσεις ανάμεσα στις ερμηνευτικές μεταβλητές
Η υπόθεση αυτή αποκλείει την ύπαρξη τέλειας πολυ-συγγραμμικότητας μεταξύ των X_i $i=1..k$ που σημαίνει ότι καμιά από τις k ερμηνευτικές μεταβλητές δεν μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

→ Υποθέσεις για τα στατιστικά στοιχεία

•) Ο αριθμός των παρατηρήσεων του δείγματος είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό των συντελεστών του υποδείγματος που θέλουμε να εκτιμήσουμε.

Θεώρημα $Y_i \sim (\beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} \quad + \beta_k X_{ki}, \sigma^2)$

Απόδ

$$E(Y_i) = E(\beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \dots + \beta_k X_{ki} + u_i) =$$

$$\beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \quad + \beta_k X_{ki} + E(u_i) \Rightarrow$$

$$E(Y_i) = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \quad + \beta_k X_{ki} \quad (2)$$

$$Var(Y_i) = E(Y_i - E(Y_i))^2 = E(u_i) = \sigma^2 \Rightarrow Var(Y_i) = \sigma^2 \quad (3)$$

Γραμμή παλινδρόμησης του πληθυσμού

$$\boxed{E(Y_i) = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \dots \quad + \beta_k X_{ki}} \quad (4)$$

Ερμηνεία των συντελεστών β_j, $j=1,2..k$:

Ο συντελεστής β_j $j=1,2...k$ παριστάνει τη μεταβολή στη μέση τιμή της Y, όταν η X_j μεταβάλλεται κατά μια μονάδα και οι υπόλοιπες ερμηνευτικές μεταβλητές παραμένουν σταθερές, δηλαδή $\beta_j = \dfrac{\partial E(Y_i)}{\partial X_{ji}}$. Οι συντελεστές β_j $j=1,2..k$ ονομάζονται και μερικοί συντελεστές παλινδρόμησης

Περιγραφή του υποδείγματος με πίνακες

Η (1) μπορεί να γραφεί για λόγους συμμετρίας ως

$$Y_i = \beta_0 X_{0i} + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \qquad + \beta_k X_{ki} + u_i \quad (5)$$

όπου $X_{0i}=1$ για όλα τα $i=1,2,\ldots N$. Δηλαδή, ο σταθερός όρος β_0 μπορεί να θεωρηθεί ως συντελεστής της μεταβλητής X_0, η οποία όμως είναι ίση με τη μονάδα.

Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned}
Y_1 &= \beta_0 X_{01} + \beta_1 X_{11} + \beta_2 X_{21} + \cdots + \beta_k X_{k1} + u_1 \\
Y_2 &= \beta_0 X_{02} + \beta_1 X_{12} + \beta_2 X_{22} + \cdots + \beta_k X_{k2} + u_2 \\
&\ \vdots \\
Y_N &= \beta_0 X_{0N} + \beta_1 X_{1N} + \beta_2 X_{2N} + \cdots + \beta_k X_{kN} + u_N
\end{aligned} \quad (6)$$

Το σύστημα (6) γράφεται πιο απλά:

$$\underset{\sim}{Y} = \underset{\sim}{X} \cdot \underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{u} \quad (7)$$

όπου:

$$\underset{\sim}{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_N \end{bmatrix}, \quad \underset{\sim}{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}, \quad \underset{\sim}{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad (8)$$

$$\underset{\sim}{X} = \begin{bmatrix} X_{01} & X_{11} & \cdots & X_{k1} \\ X_{02} & X_{12} & \cdots & X_{k2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{0N} & X_{1N} & \cdots & X_{kN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & \cdots & X_{k1} \\ 1 & X_{12} & \cdots & X_{k2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & X_{1N} & \cdots & X_{kN} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Οι υποθέσεις του υποδείγματος με τη βοήθεια των πινάκων (8), (9) γίνονται

- $E(\underset{\sim}{u}) = \underset{\sim}{0}$ Σημείωση: το σύμβολο ~ κάτω από ένα γράμμα δηλώνει ότι αυτό είναι πίνακας κατάλληλης διάστασης

πχ $\underset{\sim}{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

4/

•) $E(\underset{\sim}{u}\underset{\sim}{u}') = \sigma^2 \underset{\sim}{I}$ <u>Σημείωση α)</u> $\underset{\sim}{u}'$ είναι ο ανάστροφος πίνακας του u. Ανάστροφος είναι ο πίνακας που προκύπτει αν οι στήλες γίνουν γραμμές πχ.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

β) $\underset{\sim}{I}$ είναι ο μοναδιαίος πίνακας $N \times N$

$$\underset{\sim}{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$E(\underset{\sim}{u}\underset{\sim}{u}') = E\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}[u_1 u_2 \ldots u_N]\right) = E\left(\begin{bmatrix} u_1^2 & u_1u_2 & \cdots & u_1u_N \\ u_2u_1 & u_2^2 & \cdots & u_2u_N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_Nu_1 & u_Nu_2 & & u_N^2 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} Eu_1^2 & Eu_1u_2 & \cdots & Eu_1u_N \\ Eu_2u_1 & Eu_2^2 & \cdots & Eu_2u_N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Eu_Nu_1 & Eu_Nu_2 & \cdots & Eu_N^2 \end{bmatrix} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \sigma^2 \underset{\sim}{I}$$

<u>Μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων</u>

Όπως και στην απλή παλινδρόμηση ελαχιστοποιούμε το άθροισμα των τετραγώνων των καταλοίπων δηλαδή τη συνάρτηση.

$$Q = \Sigma \hat{u}_i^2 = \Sigma(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{1i} - \hat{\beta}_2 X_{2i} \quad - \hat{\beta}_k X_{ki})^2 \qquad (10)$$

για να προσδιορίσουμε τους εκτιμητές $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \ldots \hat{\beta}_k$ των αγνώστων $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_k$.

Σημειώνουμε ότι

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{1i} + \hat{\beta}_2 X_{2i} \qquad + \hat{\beta}_k X_{ki} \qquad (11)$$

είναι η <u>δειγματική παλινδρόμηση στο δείγμα</u>

Υπολογισμός

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial \hat{b}_0} &= -2\sum(Y_i - \hat{b}_0 - \hat{b}_1 X_{1i} - \hat{b}_2 X_{2i} \ldots - \hat{b}_k X_{ki}) = 0 \\
\frac{\partial Q}{\partial \hat{b}_1} &= -2\cdot\sum(Y_i - \hat{b}_0 - \hat{b}_1 X_{1i} - \hat{b}_2 X_{2i} \ldots - \hat{b}_k X_{ki}) X_{1i} = 0 \\
&\vdots \\
\frac{\partial Q}{\partial \hat{b}_k} &= -2\cdot\sum(Y_i - \hat{b}_0 - \hat{b}_1 X_{1i} - \hat{b}_2 X_{2i} \ldots - \hat{b}_k X_{ki}) \cdot X_{ki} = 0
\end{aligned}
\right\} (12) \Longrightarrow
$$

KANONIKEΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ:

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\sum Y_i &= N\hat{b}_0 + \hat{b}_1 \sum X_{1i} + \hat{b}_2 \sum X_{2i} \ldots + \hat{b}_k \sum X_{ki} \\
\sum Y_i X_{1i} &= \hat{b}_0 \sum X_{1i} + \hat{b}_1 \sum X_{1i}^2 + \hat{b}_2 \sum X_{2i} X_{1i} \ldots + \hat{b}_k \sum X_{ki} X_{1i} \\
&\vdots \\
\sum Y_i X_{ki} &= \hat{b}_0 \sum X_{ki} + \hat{b}_1 \sum X_{1i} X_{ki} + \hat{b}_2 \sum X_{2i} X_{ki} + \ldots + \hat{b}_k \sum X_{ki}^2
\end{aligned}
}
\quad (13)
$$

Μηχανικός κανόνας για την απομνημόνευση των κανονικών εξισώσεων. Η πρώτη εξίσωση προκύπτει αν αθροίσουμε ως προς i και τα δύο μέλη της σχέσης $Y_i = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 X_{1i} + \quad + \hat{b}_k X_{ki}$. Η δεύτερη αν πολ/με και τα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης με X_{1i} και μετά αθροίσουμε. Για την τρίτη πολ/με με X_{2i} και τα δύο μέλη και μετά αθροίζουμε κ.ο.κ.

Το σύστημα (13) μπορεί να λυθεί για παράδειγμα με τη μέθοδο του Cramer. Δηλαδή

$$\hat{b}_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \qquad (14)$$

όπου Δ η ορίζουσα των συντελεστών:

6)

$$\Delta = \begin{vmatrix} N & \sum X_{1i} & \cdots & \sum X_{ki} \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}^2 & & \sum X_{ki}X_{1i} \\ \vdots & & & \vdots \\ \sum X_{ki} & \sum X_{1i}X_{ki} & & \sum X_{ki}^2 \end{vmatrix} \qquad (15)$$

και Δ_j η ορίζουσα που προκύπτει από τη Δ, όταν η στήλη που αντιστοιχεί στο συντελεστή β_j αντικατασταθεί με το πρώτο μέλος των εξισώσεων του συστήματος Λx

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} N & \sum Y_i & & \sum X_{ki} \\ \sum X_{1i} & \sum Y_i X_i & & \sum X_{ki}X_{1i} \\ & & & \\ \sum X_{ki} & \sum Y_i X_{ki} & & \sum X_{ki}^2 \end{vmatrix} \qquad (16)$$

οπότε

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \qquad (17)$$

Διαιρώντας την πρώτη εξίσωση του συστήματος (13) με N έχουμε

$$\overline{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \overline{X}_1 + \quad + \hat{\beta}_k \overline{X}_k \Longrightarrow$$

$$\boxed{\hat{\beta}_0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_1 \overline{X}_1 - \hat{\beta}_2 \overline{X}_2 - \quad - \hat{\beta}_k \overline{X}_k} \qquad (18)$$

Αντικαθιστώντας την (18) στις υπόλοιπες εξισώσεις του συστήματος 13 έχουμε τελικά:

$$\boxed{\begin{aligned} S_{1y} &= \hat{\beta}_1 S_{11} + \hat{\beta}_2 S_{12} + \cdots + \hat{\beta}_k S_{1k} \\ S_{2y} &= \hat{\beta}_1 S_{21} + \hat{\beta}_2 S_{22} + \cdots + \hat{\beta}_k S_{2k} \\ &\vdots \\ S_{ky} &= \hat{\beta}_1 S_{k1} + \hat{\beta}_2 S_{k2} + \cdots + \hat{\beta}_k S_{kk} \end{aligned}} \qquad (19)$$

όπου:

$$S_{jy} = \sum_i (Y_i - \bar{Y})(X_{ji} - \bar{X}_j) = \sum_i X_{ji} Y_i - N \bar{X}_j \bar{Y} \quad j = 1, 2, \ldots, k \quad (20)$$

$$S_{mn} = \sum_i (X_{mi} - \bar{X}_m) \cdot (X_{ni} - \bar{X}_n) = \sum_i X_{mi} X_{ni} - N \bar{X}_m X_n \quad m, n = 1, 2, \ldots, k \quad (21)$$

Για παράδειγμα:

$$S_{12} = \sum X_{1i} X_{2i} - N \bar{X}_1 \bar{X}_2$$

$$S_{22} = \sum X_{2i}^2 - N \bar{X}_2^2$$

$$S_{1y} = \sum X_{1i} Y_i - N \bar{X}_1 \bar{Y}$$

Χρησιμοποιώντας πίνακες το διάνυσμα των καταλοίπων είναι:

$$\hat{u} = Y - X \hat{\beta} \quad (22)$$

οπότε

$$Q = \hat{u}' \hat{u} = (Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta}) = \quad [\text{Σημείωση } (XY)' = Y'X']$$

$$= Y'Y - \hat{\beta}' X' Y - Y' X \hat{\beta} + \hat{\beta}' X' X \hat{\beta} \Longrightarrow$$

$\hat{\beta}' X' Y$ είναι αριθμός οπότε αφού $(Y' X \hat{\beta})' = \hat{\beta}' X' Y$ = αριθμός θα ισχύει $\hat{\beta}' X' Y = Y' X \hat{\beta}'$

$$\Longrightarrow Q = Y'Y - 2\hat{\beta}' X' Y + \hat{\beta}' X' X \hat{\beta} \quad (23)$$

Παραγωγίζοντας αυτήν την Q ως προς $\hat{\beta}$ και εξισώνοντας τις παραγώγους με μηδέν παίρνουμε τις κανονικές εξισώσεις με τη βοήθεια πινάκων.

$$\frac{\partial Q}{\partial \hat{\beta}} = -2X'Y + 2X'X\hat{\beta} = 0 \Longrightarrow$$

$$\boxed{(X'X)\hat{\beta} = X'Y} \quad (24)$$

Οπότε οι εκτιμητές ελαχίστων τετραγώνων δίνονται από τη σχέση:

$$\boxed{\hat{\beta} = (X'X)^{-1}(X'Y)} \quad (25)$$

Θεώρημα Gauss-Markov (χωρίς απόδειξη)

Στο κλασικό γραμμικό υπόδειγμα οι εκτιμητές των συντελεστών $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k$ που προκύπτουν από τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων:

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}} = (\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X})^{-1} \cdot \underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{Y}$$

είναι <u>άριστοι, γραμμικοί και αμερόληπτοι</u>, ενώ οι διακυμάνσεις και συνδιακυμάνσεις τους δίνονται από τη σχέση:

$$Var(\hat{\underset{\sim}{\beta}}) = \sigma^2 (X'X)^{-1} \qquad (26)$$

δηλαδή

$$Var(\hat{\underset{\sim}{\beta}}) = \begin{bmatrix} Var(\hat{\beta}_0) & Cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) & \cdots & Cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_k) \\ Cov(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0) & Var(\hat{\beta}_1) & \cdots & Cov(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_k) \\ \vdots & \vdots & & \\ Cov(\hat{\beta}_k, \hat{\beta}_0) & Cov(\hat{\beta}_k, \hat{\beta}_1) & \cdots & Var(\hat{\beta}_k) \end{bmatrix} = \qquad (27)$$

$$= \sigma^2 \cdot \begin{bmatrix} N & \Sigma X_{1i} & \cdots & \Sigma X_{ki} \\ \Sigma X_{1i} & \Sigma X_{1i}^2 & \cdots & \Sigma X_{1i} X_{ki} \\ \vdots & \vdots & & \\ \Sigma X_{ki} & \Sigma X_{1i} X_{ki} & \cdots & \Sigma X_{ki} \end{bmatrix}^{-1}$$

Η άγνωστη διακύμανση σ^2 του διαταρακτικού όρου εκτιμάται από τον αμερόληπτο εκτιμητή:

$$S^2 = \frac{\Sigma \hat{u}_i^2}{N-k-1} = \frac{\Sigma(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{1i} - \ldots - \hat{\beta}_k X_{ki})^2}{N-k-1} = \qquad (28)$$

$$= \frac{S_{yy} - \hat{\beta}_1 S_{1y} - \hat{\beta}_2 S_{2y} - \ldots - \hat{\beta}_k S_{ky}}{N-k-1}$$

Παράδειγμα

Έστω Y οι ετήσιες αποδοχές των εργαζομένων σε μια εταιρία και X_1 τα χρόνια εκπαίδευσης μετά το γυμνάσιο και X_2 τα χρόνια εργασίας στην εταιρία. Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του πίνακα:

Y (χιλ. €)	X_1	X_2
30	4	10
20	3	8
36	6	11
24	4	9
40	8	12

να εκτιμηθούν οι παράμετροι β_0, β_1, β_2 με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων της σχέσης

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + u_i$$

Λύση

Έχουμε

$N = 5$

$\Sigma X_{1i} = 25 \quad \Sigma X_{2i} = 50 \quad \Sigma Y_i = 150$

$\bar{Y} = \frac{\Sigma Y}{N} = \frac{150}{5} = 30$, $\bar{X}_1 = \frac{\Sigma X_{1i}}{N} = \frac{25}{5} = 5$, $\bar{X}_2 = \frac{\Sigma X_{2i}}{N} = \frac{50}{5} = 10$

Φτιάχνουμε τον πίνακα:

X_1^2	X_2^2	$X_1 X_2$	$X_1 Y$	$X_2 Y$
16	100	40	120	300
9	64	24	60	160
36	121	66	216	396
16	81	36	96	216
64	144	96	320	480

Οπότε έχουμε

$\Sigma X_{1i}^2 = 141$, $\Sigma X_{2i}^2 = 510$

$\Sigma X_{1i} \cdot X_{2i} = 262$

$\Sigma X_{1i} Y_i = 812$

$\Sigma X_{2i} Y_i = 1552$

$S_{11} = \Sigma X_{1i}^2 - N \cdot \bar{X}_1^2 = 141 - 5 \cdot 5^2 = 16$

$S_{22} = \Sigma X_{2i}^2 - N \bar{X}_2^2 = 510 - 5 \cdot 10^2 = 10$

$S_{12} = \Sigma X_{1i} \cdot X_{2i} - N \bar{X}_1 \bar{X}_2 = 262 - 5 \cdot 5 \cdot 10 = 12$

$S_{1y} = \Sigma X_{1i} Y_i - N \bar{X}_1 \bar{Y} = 812 - 5 \cdot 5 \cdot 30 = 62$

$S_{2y} = \Sigma X_{2i} Y_i - N \bar{X}_2 \bar{Y} = 1552 - 5 \cdot 10 \cdot 30 = 52$

Οπότε το σύστημα (19) μας δίνει:

$$62 = 16\hat{\beta}_1 + 12\hat{\beta}_2$$
$$52 = 12\hat{\beta}_1 + 10\hat{\beta}_2$$

Λύνουμε το σύστημα με τη μέθοδο Cramer

$$\Delta = \begin{vmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 10 \end{vmatrix} = 16\cdot 10 - 12\cdot 12 = 160 - 144 = 16$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 62 & 12 \\ 52 & 10 \end{vmatrix} = 62\cdot 10 - 12\cdot 52 = -4$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 16 & 62 \\ 12 & 52 \end{vmatrix} = 16\cdot 52 - 12\cdot 62 = 88$$

οπότε

$$\hat{\beta}_1 = \frac{-4}{16} = -0,25 \qquad \hat{\beta}_2 = \frac{88}{16} = 5,5$$

Από τη σχέση 18 έχουμε:

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1\bar{X}_1 - \hat{\beta}_2 X_2 =$$
$$= 30 - (-0,25)\cdot 5 - 5,5\cdot 10 \Rightarrow$$
$$\hat{\beta}_0 = -23,75$$

Επομένως η δειγματική παλινδρόμησης είναι:

$$\hat{Y} = -23,75 - 0,25X_1 + 5,5X_2$$

<u>Σχόλιο</u>: Η παραπάνω εξίσωση δηλώνει το χρόνο εργασίας στην εταιρία είναι πολύ σημαντικότερο για τις ετήσιες αποδοχές του εργαζόμενου απ' ότι το χρόνο της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης του (τα οποία μάλιστα εμφανίζονται με αρνητικό συντελεστή). Σύμφωνα με την παραπάνω εξίσωση αν έχουμε δύο εργαζόμενους με τα ίδια χρόνια εκπαίδευσης περιμένουμε ότι αυτός που εργάζεται στην εταιρία κατά 1 χρόνο περισσότερο να έχει υψηλότερες ετήσιες αποδοχές κατά 5.500€. Ανάλογα αν έχουμε δυο εργαζόμενους με τα ίδια χρόνια εργασίας περιμένουμε ότι αυτός που έχει 1 χρόνο περισσότερης εκπαίδευσης θα έχει ετήσιες αποδοχές <u>μειωμένες</u> κατά 250 €.